## **培优课11 数列的子数列问题**

### **培优点一 分段数列**

#### **审题指导**

典例1 已知数列是公差不为0的等差数列，，数列是等比数列，

且（审题①由是等比数列可求的公差）.

（1）求数列的通项公式；

（2）设（审题②是分段数列,要按不同范围求和），求数列的前项和.

**解题观摩**

[解析]（1）设等差数列的公差为,，

，…………审题①

所以，即，

因为，所以，又,所以，

因为，所以数列的公比，所以

（2）由（1）知，,

所以，…………审题②

当时，；

当时，.

故.

#### **通性通法**

1.利用等差数列的通项公式与等比中项的性质列式可解得等差数列的公差和等比数列的公比，进而可得所求通项公式.

2.对分类讨论，结合等差数列与等比数列的求和公式求和.

#### **培优训练**

##### **在分段数列关系中引入参数条件变式**

1. 已知数列满足若数列的前项和为，求当时，的值.

[解析]当，时，，即，

.

##### **将数列通项的分段问题改为数列递推关系的分段问题条件变式**

2. 已知数列的前项和为，且，.

（1）若，求证：.

（2）若，求.

[解析]（1）当时,,

当时,,

故,所以当时,总有.

（2）当时，，，，，，, ,

所以数列为5，2，4，1，2，4，1，2，4，1， ,即数列是从第2项起,以3为周期的数列,又,所以.

### **培优点二 数列中的奇偶项问题**

#### **审题指导**

典例2 [2023·新高考Ⅱ卷]已知为等差数列，（审题②,的求解注意分奇偶情况讨论）记，分别为数列，的前项和，（审题①的通项公式是关键）

（1）求的通项公式.

（2）证明：当时，.

**解题观摩**

[解析]（1）设等差数列的公差为，而 则,,，

…………审题①

解得则，所以数列的通项公式是

（2）由（1）知，，

，…………审题②，

当时，，因此；

，…………审题②

若，则，显然满足上式，因此当为奇数时，，

当时，，因此.

综上所述，当时，.

#### **通性通法**

**解答与奇偶项有关的求和问题的关键**

1.弄清当为奇数或偶数时数列的通项公式.

2.弄清当为奇数或偶数时数列前项中奇数项与偶数项的个数.

3.对于通项公式分奇、偶不同的数列求时，可以分别求出奇数项的和与偶数项的和，也可以先求出，再利用求.

#### **培优训练**

##### **将数列递推关系的奇偶项问题改为数列通项的奇偶项问题条件变式**

1. [2024·南通模拟]已知数列满足,，数列为等比数列，且满足.

（1）求数列的通项公式；

（2）若,,成等差数列，记数列满足求数列的前项和.

[解析]（1）因为,且,,所以令得，

又数列为等比数列，所以公比为2，即，则，

所以数列是以1为首项，2为公差的等差数列，所以.

（2）由（1）知数列是公比为2的等比数列，,

由,,成等差数列得，即，

所以，则，所以

数列的奇数项是以1为首项，4为公差的等差数列，偶数项是以4为首项，4为公比的等比数列，所以.

##### **将单数列的奇偶项递推问题改为双数列的奇偶项递推问题条件变式**

2. [2024·潍坊模拟]已知等比数列的公比，前项和为，满足,.

（1）求的通项公式；

（2）设求数列的前项和.

[解析]（1）因为是公比的等比数列，

所以由得

即

两式相除得，整理得，即，解得或，又，所以，则，所以.

（2）当为奇数时，，当为偶数时，，

所以

.

##### **将数列递推关系的奇偶问题改为数列前项和与通项交融的数列奇偶问题条件变式**

3. [2024·南京模拟]已知等差数列的前项和为，数列是等比数列，,,,.

（1）求数列和的通项公式；

（2）若设数列的前项和为，求.

[解析]（1）设等差数列的公差为，等比数列的公比为，

因为,,,，所以解得

所以,.

（2）由（1）知，,则

所以.

### **培优点三 两数列的公共项问题**

#### **审题指导**

典例3 已知数列与的通项公式分别为,，将它们的（审题①找到与项的等量关系），求数列的通项公式.

**解题观摩**

[解析]设，则，

…………审题①

因为3,4互质，所以必为4的倍数，即，

，所以数列的通项公式为.

#### **通性通法**

**解决两个等差数列的公共项问题的两种方法**

1.不定方程法：列出两个项相等的不定方程，利用数论中的整除知识，求出符合条件的项，并解出相应的通项公式.

2.周期法（即寻找下一项）通过观察找到首项后，从首项开始向后，逐项判断变化较大（如公差的绝对值大）的数列中的项是否为另一个数列中的项，并找到规律（如周期），分析相邻两项之间的关系，从而得到通项公式.

#### **培优训练**

##### **给定数列中一个是等差数列，一个是等比数列条件变式**

1. 已知数列，的通项公式分别为,，将这两个数列的公共项按从小到大的顺序排列组成一个新的数列，则数列的前项和为.

[解析]由题意，令,得，即2不是数列与的公共项；

令,得，即4是数列与的公共项；

令,得，即8不是数列与的公共项；

令,得，即16是数列与的公共项.

依此类推，可得数列为4,,,, ，即是首项为4，公比为4的等比数列，故的前项和为.

##### **给定数列中一个是等差数列，一个是非等差非等比数列，求最小值综合变式**

2. 已知数列，的通项公式分别为,，将这两个数列的公共项按从小到大的顺序排列组成一个新的数列，则使得成立的的最小值为19.

[解析]令，即,,，则，

所以或或,,则或或,，

所以或或,,

故数列是首项为1，且从第二项起的每一项由数列和的项按从小到大的顺序排列得到的数列，显然数列和都是递增的，

又当时，,,

当时，,,

即数列的前18项均小于2025，第19项大于2025，是第一个大于2025的项，所以使得成立的的最小值为19.